



Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales

Recinto de Río Piedras

**MATE
3163**

Apellidos: _____ Nombre: _____

No. de estudiante: _____ Profesor: _____

Primer Examen: _____ 9 de marzo de 2015 # de sección: _____

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. Evalúe cada una de las siguientes integrales :

(a) (8 puntos) $\int_1^{+\infty} 33x^2 e^{-x^3} dx$

(b) (10 puntos) $\int \frac{16x^2 + 33x + 5}{(x+3)(x^2+1)} dx$

2. Suponga que

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{y} \quad \text{que} \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

(a) (10 puntos) Mediante una sustitución apropiada, evalúe $\int_0^{+\infty} 82 \cdot e^{-\frac{x^2}{13}} dx$.

(b) (8 puntos) Defina la función $Q(x)$ como sigue $Q(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{\sqrt{2}}}^{+\infty} e^{-u^2} du$. Verifique que,

$$\text{erf}(x) + 2Q(x\sqrt{2}) = 1.$$

3. (6 puntos) Utilica la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar $\int_{-1}^{11} 3x^2 + 5 \, dx$.

4. (14 puntos) Determine el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} (4x - 8)^n$.

5. (8 puntos) Para cada una de las siguientes series, determine si converge o diverge. En cualquier caso, explique.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 \cdot 3^n}{n!}$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^{10}}{4n^{11} + 3n^2 + 1}$$

6. En la teoría de gases (cinética) la función de densidad de probabilidad para la rapidez molecular (i.e. la magnitud de la velocidad molecular) está dada por

$$f_v(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-\left(\frac{m}{2k_B T}\right)v^2},$$

donde m es la masa molecular, T es la temperatura en grados Kelvin y k_B es la constante de Boltzmann.

- (a) (8 puntos) Expresé $\int A v^4 e^{-B v^2} dv$ en términos de $\int v^2 e^{-B v^2} dv$, donde A y B son constantes.

- (b) (8 puntos) Dado que $\int_0^{+\infty} v^2 e^{-B v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{B^3}}$, encuentre $\overline{v^2} = \int_0^{+\infty} v^2 f_v(v) dv$. (Ayuda: Ponga $A = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2}$, $B = \frac{m}{2k_B T}$ y utilice la parte (a).)

7. (10 puntos) Encuentre la transformada de Laplace para la función $f(t) = (e^{10t} + e^{-10t})$.

8. (10 puntos) Encuentre $\int 6x^2 \cos(5x) \, dx$.

9. (10 puntos) Encuentre los coeficientes a_0 , a_5 y b_5 de la serie de Fourier para la función $f(x) = 6x^2$ definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Explique.