



Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE
3163

Apellidos: _____ Nombre: _____

No. de estudiante: _____ Profesor: _____

Primer Examen: _____ 24 de marzo de 2023 # de sección: _____

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. Evalúe cada una de las siguientes integrales :

(a) (8 puntos) $\int_4^{+\infty} 18x^2 e^{-x^3} dx$

(b) (10 puntos) $\int \frac{15x + 52}{(x + 3)(x + 4)} dx$

2. (10 puntos) Suponga que $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y que $\text{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$.
Mediante una sustitución apropiada, evalúe $\int_{-4}^4 21 \cdot e^{-49x^2} dx$.

3. (8 puntos) La ecuación de Van der Waals está basada en una modificación de la ley de gas ideal y para un mol de cierto gas se puede escribir de la forma

$$P = P(T, V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

donde R, a, b son constantes y T, V son variables. Al tratar de verificar la identidad

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V \partial T} \right) = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial T \partial V} \right),$$

es evidente que uno de los órdenes de diferenciación es mas difícil que el otro, evalúe esa segunda derivada parcial (la mixta) utilizando el orden de diferenciación mas sencillo.

4. (6 puntos) Utilice la regla de Simpson con $n = 4$ para aproximar $\int_4^8 (9x^2 + 3) \, dx$.

5. (8 puntos) Encuentre la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{10^{n+2}}{2^{4n}}$.

6. (8 puntos) Para cada una de las siguientes series, determine si converge o diverge. En cualquier caso, explique.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot 4^n}{n!}.$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n}{n^4 + 5n + 12}$

7. Considere la función $f(x) = (5x + 1)^{-1}$.

(a) (4 puntos) Encuentre $f^{(4)}(x)$. (**Ayuda.** No utilice la regla del cociente.)

(b) (4 puntos) Encuentre una fórmula para $f^{(n)}(x)$.

8. (6 puntos) Evalúe $\int t e^{-t(8+s)} dt$, donde $(8 + s)$ es una constante.

9. (8 *puntos*) Determine el intervalo de convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{7^n}$.

10. (8 *puntos*) Encuentre la transformada de Laplace para la función $f(t) = t \cdot e^{-8t}$.

11. (10 *puntos*) Encuentre $\int 30x^2 \cos(5x) \, dx$.

12. (8 puntos) Encuentre los coeficientes a_5 y b_5 de la serie de Fourier para la función $f(x) = 30x^2$ definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Explique.