



Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

**MATE
3163**

Apellidos: _____ Nombre: _____

No. de estudiante: _____ Profesor: _____

Segundo Examen: 10 de abril de 2015 # de sección: _____

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. La ecuación de Van der Waals está basada en una modificación de la ley de gas ideal y para un mol de cierto gas se puede escribir de la forma

$$P = P(T, V) = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

donde R, a, b son constantes y T, V son variables.

- (a) (*6 puntos*) Utilice la ecuación de Van der Waals para escribir la temperatura $T = T[P, V]$ como función de la presión P y el volumen V .

(b) (*4 puntos*) Calcule $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$.

(c) (*4 puntos*) Calcule $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P$.

2. Sea $\mathbf{G}(x, y, z) = \ln(xyz) \mathbf{i} + \cos(xy) \mathbf{j} + x^2 y^3 z^4 \mathbf{k}$.

(a) (*6 puntos*) Calcule la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{G}$ de $\mathbf{G}$ en el punto $P(3, 2, 1)$.

(b) (*10 puntos*) Calcule el rotacional $\nabla \times \mathbf{G}$ de $\mathbf{G}$ en el punto $Q(-5, 4, 1)$.

3. (8 puntos) Suponga que $\psi(x, y, z) = \sin(2x)\sin(3y)\sin(4z)$. Verifique que la función ψ , satisface la ecuación de Helmholtz

$$\nabla \cdot (\nabla \psi) + 29\psi = 0.$$

4. (8 puntos) Para la función $y = \sqrt[3]{z^5 + 6x}$, verifique que $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x = -1$.

5. (10 puntos) Suponga que $\mathbf{G}(x, y, z) = (G_1(x, y, z), G_2(x, y, z), G_3(x, y, z))$. Verifique que,
- $$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0.$$

6. (8 puntos) Evalúe la integral $\int_0^4 \int_1^2 (12x + 36x^2y^2) \, dy \, dx$

7. (10 puntos) Evalúe $\int_C 9y^2 \, dx + 4xy \, dy$ donde C es el segmento de recta que va desde $(1, 4)$ hasta $(7, 5)$.

8. Cierta región Ω en el plano puede ser descrita como una región tipo I y también como una región tipo II. Como región tipo I tenemos que

$$\iint_{\Omega} e^{y^2} \, dA = \int_0^4 \int_{x/2}^2 e^{y^2} \, dy \, dx.$$

(a) (4 puntos) Haga un dibujo de la región Ω .

(b) (4 puntos) Cambie el orden de integración en $\iint_{\Omega} e^{y^2} \, dA$ interpretando la región como si fuera de tipo II. Evalúe la integral.

9. (8 puntos) Encuentre los puntos estacionarios y determine los valores extremos (si alguno) de la función $f(x, y) = x^2 - 10x + y^2 - 8y + 100$. Explique.

10. (6 puntos) Encuentre una función $F = F(x, y)$ de modo que: $dF = (20x^4 - 10y) dx + \left(-10x + \frac{7}{y}\right) dy$.

11. (8 puntos) Utilice el método de multiplicadores de Lagrange, para encontrar los valores extremos de $f(x, y) = 49 - x^2 - y^2$ sujeto a la restricción $x + 5y = 20$.

12. (6 puntos) Resuelva el sistema $\left\{ \begin{array}{l} u = x - 4y \\ v = 2x + y \end{array} \right\}$ para x, y en términos de u, v . Luego, calcule el Jacobiano $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.