



Departamento de Matemáticas

Facultad de Ciencias Naturales
Recinto de Río Piedras

MATE
3163

Apellidos: _____ Nombre: _____

No. de estudiante: _____ Profesor: _____

Segundo Examen: 25 de abril de 2023 # de sección: _____

Para obtener crédito muestre todo su trabajo. Explique claramente su contestación.

1. Sea $\mathbf{G}(x, y, z) = \ln(xyz) \mathbf{i} + (10x^2 + z^3) \mathbf{j} + e^{10yz} \mathbf{k}$.

(a) (8 puntos) Calcule la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{G}$ de $\mathbf{G}$ en el punto $P\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 7\right)$.

(b) (8 puntos) Calcule el rotacional $\nabla \times \mathbf{G}$ de $\mathbf{G}$ en el punto $Q\left(2, \frac{1}{5}, 10\right)$.

2. (8 puntos) Una función $w = f(x, y, z)$ es *armónica* si satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Verifique que la función $w = f(x, y, z) = \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ es armónica.

3. (8 puntos) Dado que $f(x, y, z) = \cos(xz) + 4x^2 - 7y^3 + 9z^4$, encuentre ∇f en el punto $P\left(-\pi, \frac{1}{7}, 2\right)$.

4. (8 puntos) Evalúe la integral $\int_0^3 \int_{-1}^1 (30x^2 - 24xy^2) \, dy \, dx$

5. (10 puntos) Evalúe $\int_C 6y \, dx + 18x^2y \, dy$ donde C es el segmento de recta que va desde $(2, 0)$ hasta $(7, 10)$.

6. Considere la integral doble $\iint_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} dA = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} dx dy$.

(a) (4 puntos) Haga un dibujo de la región Ω .

(b) (6 puntos) Cambie el orden de integración en $\iint_{\Omega} \frac{y}{\sqrt{16+x^7}} dA$ interpretando la región como si fuera de tipo I. Evalúe la integral.

7. (8 puntos) Para la función $f(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + 3y^3 + 9y^2 - 3xy + 9y - 9x$, encuentre los puntos críticos y los valores extremos locales. Explique.

8. (6 puntos) Encuentre $F = F(x, y)$ de modo que: $dF = (20x + 20y) dx + (20x - 90y^2) dy$.

9. (16 puntos) Para cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales, encuentre la solución general y de haber condiciones iniciales encuentre la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas.

(a) $y(1+x^3) \frac{dy}{dx} = -x^2(1+y^2).$

(b) $y'' - 4y' - 21y = 0$; $y(0) = 30,$
 $y'(0) = 10.$

10. (8 puntos) Utilice el método de coeficientes indeterminados, para encontrar la solución general de la ecuación no homogénea

$$y'' - 11y' + 30y = 180x^2 + 18x + 77.$$

11. (8 puntos) Determine si la siguiente ecuación diferencial es exacta. De no serlo, encuentre un factor de integración para la ecuación. En cualquier caso resuelva la ecuación.

$$(5xy + 3x^5) dx + x^2 dy = 0.$$